

Notions de base des probabilités

(Fiche vulgarisée avec formules)

1. Qu'est-ce qu'une probabilité ?

La probabilité mesure la chance qu'un événement se produise. Elle varie entre 0 (impossible) et 1 (certain).

Exemple simple : Lancer un dé à 6 faces. La probabilité d'obtenir un 4 est :

$$\mathbb{P}(4) = \frac{1}{6}$$

2. Espace probabilisable

Un **espace probabilisable** est constitué de :

- Un ensemble Ω : tous les résultats possibles (appelé univers).
- Des événements : sous-ensembles de Ω .
- Une fonction $\mathbb{P}$ qui donne une probabilité à chaque événement.

Exemple : Pour un lancer de pile ou face :

$$\Omega = \{Pile, Face\}, \quad \mathbb{P}(Pile) = 0,5$$

3. Événements classiques

- **Événement élémentaire** : un seul résultat, ex : obtenir un 6.
- **Événement certain** : il se réalise toujours. Probabilité = 1.
- **Événement impossible** : il ne se réalise jamais. Probabilité = 0.
- **Complémentaire** : ce qui ne correspond pas à l'événement.

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$$

4. Règles de base (Axiomes de Kolmogorov)

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ (jamais négatif)
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ (l'univers est certain)
- Si A et B sont incompatibles (ne peuvent arriver ensemble) :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

5. Probabilité d'une réunion

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Traduction : si on additionne les probabilités de deux événements, il faut retirer la partie commune qu'on a comptée deux fois.

6. Probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Lecture simple : c'est la probabilité de B sachant que A est déjà réalisé.

7. Indépendance

Deux événements A et B sont dits **indépendants** si :

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

Traduction : la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

8. Loi uniforme finie

Chaque issue a la même probabilité :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre total de cas}}$$

9. Formule des probabilités totales

Si $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ est une partition de l'univers Ω :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)$$

10. Formule de Bayes (à connaître !)

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i)}{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B|A_j) \cdot \mathbb{P}(A_j)}$$

Très utilisée pour inverser les probabilités conditionnelles.

Comprendre les probabilités, c'est apprendre à quantifier l'incertitude de manière rigoureuse.