Les lois de probabilités continues
Comprendre avec des mots simples et des formules claires

Linda MATSING

Introduction – Pourquoi parler de probabilités continues ?

Contrairement aux variables discrètes qui prennent des valeurs précises, les variables continues peuvent prendre **toutes les valeurs possibles** dans un intervalle, souvent une plage de nombres réels. Exemples :
— La taille d'une personne (en cm)
— La durée d'un appel téléphonique (en secondes)
— La température en un point donné

Variable aléatoire continue : définition

Une variable X est dite **continue** si elle peut prendre une infinité de valeurs dans un intervalle donné, et que la probabilité de prendre une valeur exacte est toujours nulle. On parle alors de **fonction de densité** pour décrire la probabilité.

Fonction de densité de probabilité (PDF)

C'est une fonction $f_X(x)$ qui décrit la "densité" de probabilité autour de x. Pour une variable continue, la probabilité que X prenne une valeur dans un intervalle $[a, b]$ est donnée par :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)\, dx$$

avec

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

Espérance et variance

Espérance (moyenne) :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$$

Variance (dispersion autour de la moyenne) :

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x)\, dx$$

Les principales lois continues

1. Loi uniforme continue

Les valeurs sont toutes **également probables** entre deux bornes a et b.

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad x \in [a,b]$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exemple : choisir un nombre au hasard entre 0 et 1.

2. Loi exponentielle

Modélise le temps entre deux événements qui se produisent à un taux constant.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exemple : durée de vie d'une ampoule.

3. Loi normale (ou gaussienne)

C'est la loi la plus connue, en forme de **cloche**, symétrique autour de la moyenne μ.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2$$

Exemple : taille des adultes, erreurs de mesure.

4. Loi du Chi-carré

Spéciale, utilisée en tests statistiques. Si $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ sont des normales centrées réduites indépendantes,

$$X = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k)$$

où k est le nombre de degrés de liberté.

Résumé des choix

- **Uniforme** : tout est également probable entre deux bornes
- **Exponentielle** : temps d'attente ou durée entre événements
- **Normale** : phénomènes naturels centrés autour d'une moyenne
- **Chi-carré** : somme de carrés de variables normales (tests)

Exemples

Exemple 1 : loi uniforme

Quelle est la probabilité qu'un nombre choisi entre 2 et 5 soit entre 3 et 4 ?

$$P(3 \leq X \leq 4) = \int_3^4 \frac{1}{5-2} dx = \frac{4-3}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemple 2 : loi normale

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (normale centrée réduite), quelle est la probabilité que X soit entre -1 et 1 ?

On consulte la table de la loi normale ou utilise un logiciel, cette probabilité vaut environ 0.68 (68%).

Fiche conçue par Linda MATSING – Pour mieux comprendre les probabilités continues, avec des mots simples.